Perkalian Silang (Cross Product)

Pengertian.....

- Perkalian Silang dari dua buah vektor A dan B dinyatakan oleh **A** x **B** (dibaca: A silang B atau A cross B).
- Secara Geometri:

  Perkalian silangg dari dua vektor A dan B adalah sebuah vektor **C = A x B,** yang besarnya adalah hasil kali antara besarnya **A** dan **B** dan sinus sudut θ antara keduanya.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta\, \mathbf{u}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

- Secara Analitis

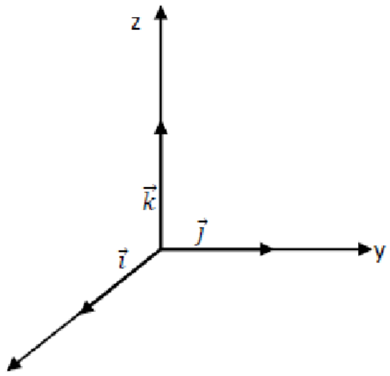
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

2

PERKALIAN VEKTOR SATUAN

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = |\mathbf{i}||\mathbf{i}| \sin 0° \,\mathbf{u} = 0$
$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = |\mathbf{j}||\mathbf{j}| \sin 0° \,\mathbf{u} = 0$
$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = |\mathbf{k}||\mathbf{k}| \sin 0° \mathbf{u} = 0$
$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = |\mathbf{i}||\mathbf{j}| \sin 90° \,\mathbf{u} = 1.1.1.\,\mathbf{k} = \mathbf{k}$
$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = |\mathbf{i}||\mathbf{k}| \sin 90° \,\mathbf{u} = 1.1.1.\,(-\mathbf{j}) = -\mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = |\mathbf{j}||\mathbf{i}| \sin 90° \,\mathbf{u} = 1.1.1.\,(-\mathbf{k}) = -\mathbf{k}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = |\mathbf{j}||\mathbf{k}| \sin 90° \,\mathbf{u} = 1.1.1.\,\mathbf{i} = \mathbf{i}$
$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = |\mathbf{k}||\mathbf{i}| \sin 90° \,\mathbf{u} = 1.1.1.\,\mathbf{j} = \mathbf{j}$
$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = |\mathbf{k}||\mathbf{j}| \sin 90° \,\mathbf{u} = 1.1.1.\,(-\mathbf{i}) = -\mathbf{i}$



×	i	j	k
i	0	k	−j
j	−j	0	i
k	j	−i	0

3

SIFAT-SIFAT PERKALIAN SILANG

Sifat-sifat perkalian silang

Misalkan **A**, **B**, dan **C** adalah vektor-vektor dan m adalah bilangan real, maka berlaku:

a. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ tidak berlaku hukum komutatif

b. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ hukum distributif

c. $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$, m skalar

d. $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$

e. Hasil dari $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ sama dengan luas jajaran genjang dengan sisi $\vec{A}$ dan **B**

f. Jika $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ dan **A** dan **B** bukan vektor nol, maka $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$

4

SIFAT-SIFAT PERKALIAN SILANG

Bukti:

Pertama, kita misalkan $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Maka

ii. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times [(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k})]$

$= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times [(B_1 + C_1)\mathbf{i} + (B_2 + C_2)\mathbf{j} + (B_3 + C_3)\mathbf{k}]$

Dengan menggunakan definisi 2.7, diperoleh

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 + C_1 & B_2 + C_2 & B_3 + C_3 \end{vmatrix}$$

$$= [A_2(B_3 + C_3) - A_3(B_2 + C_2)]\mathbf{i} - [A_1(B_3 + C_3) - A_3(B_1 + C_1)]\mathbf{j} + [A_1(B_2 + C_2) - A_2(B_1 + C_1)]\mathbf{k}$$

$$= (A_2B_3 + A_2C_3 - A_3B_2 - A_3C_2)\mathbf{i} - (A_1B_3 + A_1C_3 - A_3B_1 - A_3C_1)\mathbf{j} + (A_1B_2 + A_1C_2 - A_2B_1 - A_2C_1)\mathbf{k}$$

$$= [(A_2B_3 - A_3B_2) + (A_2C_3 - A_3C_2)]\mathbf{i} - [(A_1B_3 - A_3B_1) + (A_1C_3 - A_3C_1)]\mathbf{j} + [(A_1B_2 - A_2B_1) + (A_1C_2 - A_2C_1)]\mathbf{k}$$

5

SIFAT-SIFAT PERKALIAN SILANG

$$= [(A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}] + [(A_2C_3 - A_3C_2)\mathbf{i} - (A_1C_3 - A_3C_1)\mathbf{j} + (A_1C_2 - A_2C_1)\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

6

PERKALIAN RANGKAP TIGA

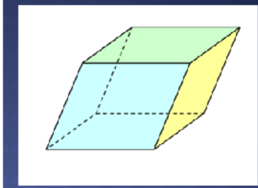
Misalkan **A**, **B**, dan **C** adalah vektor-vektor, maka berlaku:

a. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

b. Hasil dari $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ merupakan volume sebuah paralelepipidum dengan **A**, **B**, dan **C** sebagai rusuk-rusuknya atau negatif dari volume tersebut. Positif atau negatif dari volume tersebut sesuai dengan apakah **A**, **B**, dan **C** membentuk sistem tangan kanan atau tidak.

Jika $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$, maka

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$



c. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ tidak berlaku hukum asosiatif

d. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B})\mathbf{C}$

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}.\mathbf{C})\mathbf{A}$

Hasil kali $\mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ sering disebut *hasil kali tripel skalar* dan dapat dinyatakan dengan $\mathbf{A}.\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ atau $[\mathbf{ABC}]$.

Hasil kali $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ disebut hasil kali tripel vektor

7

CONTOH

Contoh 1

Jika $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, buktikan bahwa

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$$

$$= A_1\mathbf{i}(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$$

$$= A_1B_1\mathbf{i}\times\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\times\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\times\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\times\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\times\mathbf{k} + A_3B_1\mathbf{k}\times\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\times\mathbf{k}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

8

CONTOH

Contoh 2

Jika $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Tentukan (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, (b) Sudut yang dibentuk oleh **A** dan **B.**

Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
\text{(a) } \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \big((-2)(2) - (1)(1)\big)\mathbf{i} + \big((1)(3) - (2)(2)\big)\mathbf{j} \\
&\quad + \big((2)(1) - (-2)(3)\big)\mathbf{k} \\
&= (-4 - 1)\mathbf{i} + (3 - 4)\mathbf{j} + (2 + 6)\mathbf{k} \\
&= -5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

9

CONTOH

Contoh 2

(b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta\, \mathbf{u}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 8^2}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}\,\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{90}}{3\sqrt{14}}$$

$$\theta = arc \sin \frac{\sqrt{90}}{3\sqrt{14}} = 57{,}69^\circ$$

Jadi sudut antara **A** dan **B** adalah $57{,}69^\circ$.

10

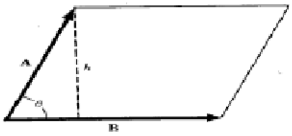
CONTOH

Contoh 3

Hitunglah luas jajaran genjang yang sisi-sisinya adalah $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Penyelesaian

Luas jajaran genjang $= h|\mathbf{B}|$
$= |\mathbf{A}| \sin\theta |\mathbf{B}|$
$= |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$



$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \big((-6)(-1) - (-3)(3)\big)\mathbf{i} + \big((-3)(4) - (2)(-1)\big)\mathbf{j} + \big((2)(3) - (-6)(4)\big)\mathbf{k}$

$= (6+9)\mathbf{i} + (-12+2)\mathbf{j} + (6+24)\mathbf{k}$

$= 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + 30^2} = \sqrt{225 + 100 + 900} = \sqrt{1225} = 35$

Jadi luas jajar genjang adalah 35.

11

CONTOH

Contoh 4

Jika $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$

Buktikanlah bahwa $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

Penyelesaian

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).[(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}]$

$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

12

CONTOH

Contoh 5

Jika $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tentukan $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

Penyelesaian

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 3(-1+8) - (-2-12) + (-4-3)$

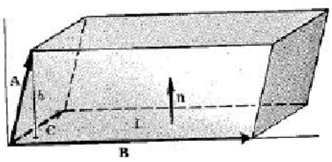
$= 21 + 14 - 7$

$= 28$

CONTOH

Contoh 6

Tentukanlah volume paralelepipidum dengan rusuk-rusuknya adalah vektor-vektor : $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.



Penyelesaian

volume paralelepipidum= (tinggi h)(luas jajaran genjang l)

$= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|)$

$= \mathbf{A} \cdot (|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|\mathbf{n})$

$= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

$$V = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2(4+1) + 2(-5+2) + 3(-1-10)$

$= |-29| = 29$

SOAL#1

Jika $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Carilah $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$

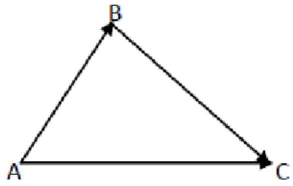
SOAL#2

Jika $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Carilah $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

SOAL#3

Carilah luas segitiga yang titik-titik sudutnya (3,-1,2), (1,-1,-3), dan (4,-3,1)



SOAL#4

Carilah volume paralelepipedum yang sis-sisinya dinyatakan oleh $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.