DOT PRODUCT

PERKALIAN TITIK

Perkalian Titik

Perkalian titik dari dua buah vektor **A** dan **B** dinyatakan oleh $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (baca: **A** titik **B**).

Untuk lebih jelas, berikut didefinisikan perkalian titik pada bidang:

Secara geometri:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ didefinisikan sebagai perkalian antara besarnya vektor-vektor **A** dan **B** dan cosinus sudut θ antara keduanya.

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \boldsymbol{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi}$$

PERKALIAN TITIK

Secara analitik:

Misalkan $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j}$ dan $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j}$ adalah dua vektor pada bidang dengan sistem koordinat x dan y, maka **A. B** didefinisikan:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2}$$

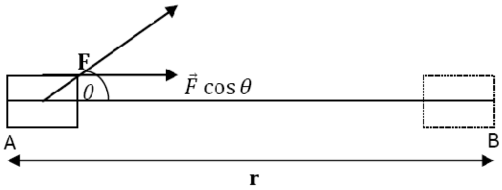
Sedangkan vektor pada bidang dengan sistem koordinat x, y, dan z, dimana $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, maka **A. B** didefinisikan:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}$$

PERKALIAN TITIK

"Hasil kali titik dari dua vektor menghasilkan skalar"

PERKALIAN TITIK



Gambar tersebut menunjukkan sebuah objek yang diberi gaya **F**. Objek tersebut bergerak lurus sejauh **r** dari titik **A** ke titik **B** . Usaha untuk gaya konstan tersebut dirumuskan sebagai berikut.

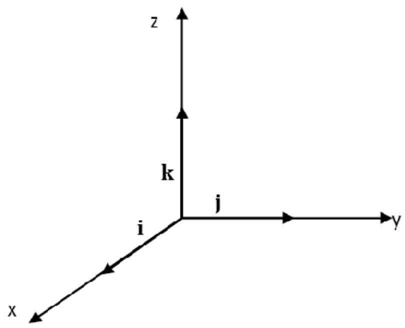
$$W = (|\mathbf{F}\cos\theta|)(|\mathbf{r}|)$$
$$= |\mathbf{F}||\mathbf{r}|\cos\theta, \qquad \theta\text{: sudut antara gaya } \mathbf{F} \text{ dan } \mathbf{r}$$

$$\boxed{W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}}$$

Jadi, usaha W merupakan hasil dari perkalian titik antara gaya **F** dengan perpindahan **r**.

PERKALIAN VEKTOR SATUAN

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}||\mathbf{i}|\cos 0° = 1.1.1 = 1$
$\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{j}||\mathbf{j}|\cos 0° = 1.1.1 = 1$
$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{k}||\mathbf{k}|\cos 0° = 1.1.1 = 1$
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{i}||\mathbf{j}|\cos 90° = 1.1.0 = 0$
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}||\mathbf{k}|\cos 90° = 1.1.0 = 0$
$\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{j}||\mathbf{i}|\cos 90° = 1.1.0 = 0$
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{j}||\mathbf{k}|\cos 90° = 1.1.0 = 0$
$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{k}||\mathbf{i}|\cos 90° = 1.1.0 = 0$
$\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}||\mathbf{j}|\cos 90° = 1.1.0 = 0$



PERKALIAN VEKTOR SATUAN

.	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

PERKALIAN VEKTOR SATUAN

Sifat-sifat perkalian titik:

Misalkan **A**, **B**, dan **C** adalah tiga buah vektor dan m adalah bilangan real, maka berlaku:

- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ hukum komutatif
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ hukum distributif
- $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$
- $0\cdot\mathbf{A} = 0$
- Jika $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, dimana **A** dan **B** adalah vektor-vektor tak nol, maka $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$
- $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \le |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ (ketaksamaan Schwarz)

PERKALIAN VEKTOR SATUAN

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$
  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = {A_1}^2 + {A_2}^2$
  $= (\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2})^2$
  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$
  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
  Karena $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2,$ dan B_3 adalah bilangan real, maka
  $A_1B_1 = B_1A_1$, $A_2B_2 = B_2A_2$, dan $A_3B_3 = B_3A_3$
  Sehingga
  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = B_1A_1 + B_2A_2 + B_3A_3$
  $= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

PERKALIAN VEKTOR SATUAN

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k})]$
  $= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_1 + C_1)\mathbf{i} + (B_2 + C_2)\mathbf{j} + (B_3 + C_3)\mathbf{k}]$
  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = A_1(B_1 + C_1) + A_2(B_2 + C_2) + A_3(B_3 + C_3)$
  $= A_1B_1 + A_1C_1 + A_2B_2 + A_2C_2 + A_3B_3 + A_3C_3$
  $= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3$
  $= (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + (A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3)$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

SOAL#1

Jika **A** = **i** + 2**j** dan **B** = 2**i** − 3**j**, tentukan

a. **A** · **B**
b. Sudut yang dibentuk oleh **A** dan **B**

a. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (1)(2) + 2(-3) = 2 - 6 = -4$

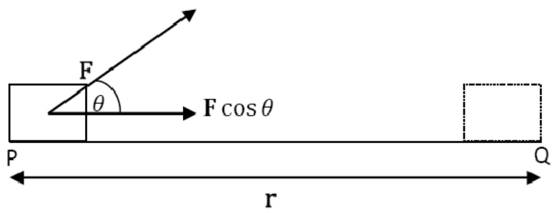
b. Berdasarkan definisi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$, dengan θ adalah sudut yang dibentuk oleh **A** dan **B.** Maka

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{-4}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{-4}{\sqrt{65}} = -0{,}4961$$

$$\theta = arc\cos(-0{,}4961) = 119{,}74$$

SOAL#2

Tentukan usaha yang dilakukan oleh seorang anak dengan **F** = 2**i** + 3**j** + 4**k** untuk memindahkan benda dari titik P(-1, 2, 3) ke Q(5, 6, 7)



SOAL#3

Untuk harga a manakah $\mathbf{A} = a\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ saling tegak lurus?