Matematika III

DIFFERENSIAL VEKTOR
(Turunan Biasa Fungsi Vektor)

BLOG DOSEN:
ananda.lecture.ub.ac.id

FUNGSI VEKTOR

Jika sembarang nilai skalar t dikaitkan dengan suatu vektor **A**, maka **A** bisa dinyatakan sebagai fungsi vektor dari t atau $\mathbf{A}(t)$, yaitu suatu vektor yang komponen-komponennya merupakan fungsi dari nilai skalar t.

Dalam R^2, fungsi vektor $\mathbf{A}(t)$ biasa ditulis dengan,

$$\boxed{\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j}}$$

dalam R^3, fungsi vektor $\mathbf{A}(t)$ ditulis dengan,

$$\boxed{\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j} + A_3(t)\mathbf{k}}$$

2

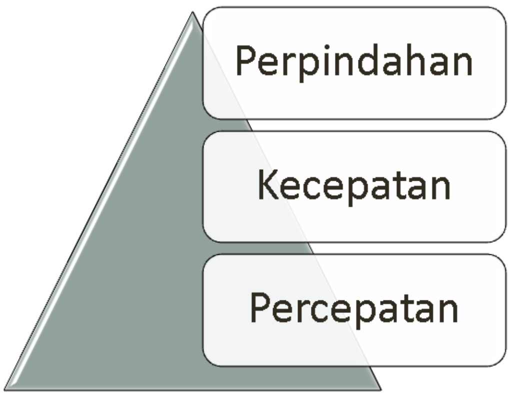
FUNGSI VEKTOR

Konsep fungsi vektor ini bisa diperluas, jika sembarang titik (x,y,z) di R^3 dikaitkan dengan suatu vektor **A**, maka **A** bisa dinyatakan dalam bentuk fungsi vektor sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

3

Contoh Vektor (Turunan)



4

Rute Penerbangan:
Malang ke Jakarta

Pesawat melakukan **Perpindahan** dengan titik awal Malang, titik akhir Jakarta

Perpindahan terjadi karena pesawat mempunyai **kecepatan** dan **percepatan**

5

Perpindahan terjadi karena pesawat mempunyai **kecepatan dan percepatan**

Kecepatan → perpindahan benda tiap selang waktu tertentu

→ Turunan dari perpindahan sebagai fungsi waktu.

Percepatan → perubahan kecepatan dalam selang waktu berubahnya kecepatan

→ Turunan kecepatan sebagai fungsi waktu

6

Definisi Turunan Vektor

$\mathbf{A}(t)$ adalah sebuah fungsi vektor yang bergantung pada sebuah variabel t, didefinisikan turunan dari $\mathbf{A}(t)$ sebagai berikut:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

Jika fungsi vektor $\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j} + A_3(t)\mathbf{k}$ dengan fungsi skalar-fungsi skalar $A_1(t)$, $A_2(t)$, dan $A_3(t)$ dapat diferensialkan terhadap variabel t, maka $\mathbf{A}(t)$ mempunyai turunan variabel terhadap t yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$$

7

Sifat Turunan Biasa Fungsi Vektor

Jika **A**, **B**, dan **C** adalah fungsi-fungsi vektor dari sebuah skalar t yang diferensiabel dan ϕ sebuah fungsi skalar dari t yang diferensiabel, maka

i. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$

ii. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \mathbf{A}.\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}.\mathbf{B}$

iii. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}$

iv. $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\mathbf{A}$

v. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}.\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}.\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A}.\frac{d\mathbf{B}}{dt}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}.\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

vi. $\frac{d}{dt}\{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{dt}\right) + \mathbf{A}\times\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\times\mathbf{C}\right) + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

8

Turunan Biasa Fungsi Vektor

1. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\mathbf{A}(t+\Delta t)+\mathbf{B}(t+\Delta t)]-[\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t)]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{B}(t+\Delta t)-\mathbf{B}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

9

Turunan Biasa Fungsi Vektor

2. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \mathbf{A}\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}.\mathbf{B}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\mathbf{A}(t+\Delta t).\mathbf{B}(t+\Delta t)]-[\mathbf{A}(t).\mathbf{B}(t)]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t).\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t+\Delta t).\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t+\Delta t).\mathbf{B}(t) - \mathbf{A}(t).\mathbf{B}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t).[\mathbf{B}(t+\Delta t)-\mathbf{B}(t)]}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)].\mathbf{B}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{A}(t+\Delta t) . \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{B}(t+\Delta t)-\mathbf{B}(t)}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}.\mathbf{B}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \mathbf{A}.\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}.\mathbf{B}$$

10

Turunan Biasa Fungsi Vektor

4. $\dfrac{d}{dt}(\phi\mathbf{A}) = \phi\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} + \dfrac{d\phi}{dt}\mathbf{A}$

$$\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{A}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi(t+\Delta t)\mathbf{A}(t+\Delta t)-\phi(t)\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi(t+\Delta t)\mathbf{A}(t+\Delta t)-\phi(t+\Delta t)\mathbf{A}(t)+\phi(t+\Delta t)\mathbf{A}(t)-\phi(t)\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi(t+\Delta t)[\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)]+[\phi(t+\Delta t)-\phi(t)]\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\phi(t+\Delta t)\,.\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t)}{\Delta t}\,.\,\mathbf{A}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\mathbf{A}$$

Fungsi, $y(x)$	**Turunan, y'**	**Fungsi, $y(x)$**	**Turunan, y'**
Konstanta	0	$\sin^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\cos^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{-a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
e^x	e^x	$\tan^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{1+(ax+b)^2}$
e^{-x}	$-e^{-x}$	$\sinh(ax+b)$	$a\cosh(ax+b)$
e^{ax}	ae^{ax}	$\cosh(ax+b)$	$a\sinh(ax+b)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\tanh(ax+b)$	$a\,\mathrm{sech}^2(ax+b)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{cosech}(ax+b)$	$-a\,\mathrm{cosech}(ax+b)\coth(ax+b)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{sech}(ax+b)$	$-a\,\mathrm{sech}(ax+b)\tanh(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\coth(ax+b)$	$-a\,\mathrm{cosech}^2(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\sinh^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{(ax+b)^2+1}}$
$\tan(ax+b)$	$a\sec^2(ax+b)$	$\cosh^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{(ax+b)^2-1}}$
$\mathrm{cosec}(ax+b)$	$-a\,\mathrm{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$	$\tanh^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
$\sec(ax+b)$	$a\sec(ax+b)\tan(ax+b)$		

CONTOH 1

Contoh I

Jika $\mathbf{f}(t) = e^{\sin(t^2+2t)}\mathbf{i} + \ln(t^2+2t)\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$, tentukan $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$

Penyelesaian

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{df_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{df_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{df_3}{dt}\mathbf{k}$$
$$= \frac{d\left(e^{\sin(t^2+2t)}\right)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(\ln(t^2+2t))}{dt}\mathbf{j} + \frac{d(4t^3)}{dt}\mathbf{k}$$
$$= (2t+2)\cos(t^2+2t)e^{\sin(t^2+2t)}\mathbf{i} + \frac{2t+2}{t^2+2t}\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$$

13

CONTOH 2

Jika $\mathbf{A} = (t^2+2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2t\mathbf{i} + \sin t^2\,\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$. Tentukan $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ di $t = 0$

Penyelesaian

Cara 1

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$= (t^2+2t)2t + 2t\sin t^2 + 4t^4$$
$$= 2t^3 + 4t^2 + 2t\sin t^2 + 4t^4$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{dt}[2t^3 + 4t^2 + 2t\sin t^2 + 4t^4]$$
$$= 6t^2 + 8t + 4t^2\cos t^2 + 2\sin t^2 + 16t^3$$

pada saat $t = 0$, maka

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = 0$$

14

CONTOH 2

Jika $\mathbf{A} = (t^2 + 2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2t\mathbf{i} + \sin t^2\,\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$. Tentukan $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ di $t = 0$

Cara 2 (menggunakan sifat turunan)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$$
$$= [(t^2 + 2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}]\cdot(2\mathbf{i} + 2t\cos t^2\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$
$$+ [(2t + 2)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}]\cdot(2t\mathbf{i} + \sin t^2\,\mathbf{j} + 4t\mathbf{k})$$
$$= (t^2 + 2t)2 + 4t^2\cos t^2 + 4t^3 + (2t + 2)2t + 2\sin t^2 + 12t^3$$
$$= 16t^3 + 6t^2 + 8t + 4t^2 \quad \cos t^2 + 2\sin t^2$$

pada saat $t = 0$, maka

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = 0$$

15

CONTOH 3

Jika $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, tentukan vektor singgung satuan pada titik $t = 1$.

Vektor singgung satuan $(\mathbf{T}) = \dfrac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[(3t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}]$$
$$= 6t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{(6t)^2 + (2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{44t^2} = t\sqrt{44}$$
$$\mathbf{T} = \frac{6t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}}{t\sqrt{44}}$$

Saat $t = 1$, maka $\mathbf{T} = \frac{6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{44}}$

16

LATIHAN

Carilah kecepatan dan percepatan sebuah partikel yang bergerak sepanjang kurva $x = 2\sin 3t\,, y = 2\cos 3t\,, z = 8t$ pada sebarang saat $t > 0$. Carilah besarnya kecepatan dan percepatan

Penyelesaian

Vektor posisi dari pergerakan partikel

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$
$$= \dots\dots\dots\ \mathbf{i} + \dots\dots\dots\ \mathbf{j} + 8t\mathbf{k}$$

Kecepatan diperoleh dari turunan pertama $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}(\dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots)$$
$$= \dots\dots\dots\ \mathbf{i} - \dots\dots\dots + 8\mathbf{k}$$

Misalkan $t = 90^\circ$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\dots\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots\dots) + \dots}$$
$$= \sqrt{0 + \dots + \dots}$$
$$= \dots$$

LATIHAN

Carilah kecepatan dan percepatan sebuah partikel yang bergerak sepanjang kurva $x = 2\sin 3t\,, y = 2\cos 3t\,, z = 8t$ pada sebarang saat $t > 0$. Carilah besarnya kecepatan dan percepatan

Percepatan diperoleh dari turunan pertama $\mathbf{v}$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}(\dots\dots\dots\dots - 6\sin 3t\,\mathbf{j} + \dots)$$
$$= -\ \dots\dots\dots\dots - \dots\dots\dots\dots$$

Misalkan $t = 90^\circ$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\dots\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots\dots)}$$
$$= \sqrt{\dots} = 18$$

Jadi, besarnya kecepatan adalah ... dan percepatan 18.

LATIHAN

1. Jika $\mathbf{A} = 5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$, carilah $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

2. Jika $\mathbf{A} = 3t^2\mathbf{i} - (t+4)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \sin t\,\mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j} - 3\cos t\,\mathbf{k}$. Tentukan $\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ pada saat $t = 0$.

19