MATEMATIKA III

INTEGRASI VEKTOR (1)

MATEMATIKA III

1. Integral Biasa
2. Integral Garis

1. Integral Biasa

DEFINISI Integral Biasa

- Misalkan **A**(t) = $A_1(t)$ **i** + $A_2(t)$ **j** + $A_3(t)$ **k**
- **A** (t) sebuah vektor yang bergantung pada variabel t
- A_1(t), A_2(t), A_3 (t) kontinu dala suatu selang yang ditentukan

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{i}\int A_1(t)dt + \mathbf{j}\int A_2(t)dt + \mathbf{k}\int A_3(t)dt$$

Integral tak tentu dari ***A***(t)

Jika:

- Terdapat vektor **B**(t) → sehingga **A**(t) = d/dt (**B**(t)), maka:

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \int \frac{d}{dt}(\mathbf{B}(t))dt = \int d\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t) + \mathbf{C}$$

- C adalah vektor konstanta

3

1. Integral Biasa

- Integral tentu dengan batas antara $t = a$ dan $t = b$, ditulis:

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(\mathbf{B}(t))dt = \mathbf{B}(t) + \mathbf{C}\Big|_a^b = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$$

Integral tentu

- Misalkan fungsi percepatan a(t) = $a_1(t)$ **i** + $a_2(t)$ **j** + a_3 (t) **k** → bergantung pada parameter t (waktu).
- Kecepatan **v**(t) adalah integral dari percepatan ***a(t)***.

$$\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{i}\int a_1(t)dt + \mathbf{j}\int a_2(t)dt + \mathbf{k}\int a_3(t)dt = \mathbf{v}(t) + C$$

4

2. Konsep Integral Garis

Usaha (W) = F . r

(gaya . Perpindahan)

$$W = \sum_i \mathbf{F}_i . \Delta \mathbf{r}_i$$

Gaya berubah arah & besarnya, obyek bergerak tidak lurus

$$W = \int_a^b \mathbf{F}. d\mathbf{r}$$

Perubahan kontinu

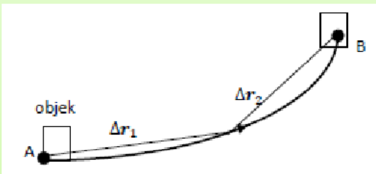
2. Integral Garis

DEFINISI Integral Garis

- Integral garis dari suatu fungsi vektor A(t) sepanjang kurva C yang tedefinisi pada $a \le t \le b$ didefinisikan:

$$\int \mathbf{A}.d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}.d\mathbf{r} = \int_a^b (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz)$$

$$= \int_a^b (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$



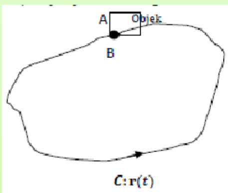
2. Integral Garis

DEFINISI Integral Garis

- Jika obyek bergerak sepanjang lintasan tertutup → bergerak dalam suatu lintasan C yang tidak lurus, berawal di titik A dan berakhir di titik B (dimana A = B)

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{r} = \oint_C (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).d(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

$$= \oint_C (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$



7

CONTOH 1

Jika $\mathbf{R}(u) = u^3\mathbf{i} + (u^2 - 1)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, carilah (a) $\int \mathbf{R}(u)du$ dan (b) $\int_0^1 \mathbf{R}(u)du$

Penyelesaian

(a) $\int \mathbf{R}(u)du = \int [u^3\mathbf{i} + (u^2 - 1)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}]du$

$$= \mathbf{i}\int u^3 du + \mathbf{j}\int (u^2 - 1)du + \mathbf{k}\int 5\,du$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{u^4}{4} + c_1\right) + \mathbf{j}\left(\frac{u^3}{3} - u + c_2\right) + \mathbf{k}(5u + c_3)$$

$$= \left(\frac{u^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\mathbf{j} + (5u)\mathbf{k} + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{u^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\mathbf{j} + (5u)\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

(b) $\int_0^1 \mathbf{R}(u)du = \left(\frac{u^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\mathbf{j} + (5u)\mathbf{k} + \mathbf{c}\Big|_0^1$

$$= \left[\left(\frac{1^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)\mathbf{j} + (5.1)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right] - [0 + \mathbf{c}]$$

$$= \frac{1}{4}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

di mana $\mathbf{c}$ adalah vektor konstan $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$

8

CONTOH 2

Jika $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{k}$, hitunglah $\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dt$

Penyelesaian

$$\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dt = \int_0^2 [t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}](2t^2\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + 6t(t-1)\,dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + 6t^2 - 6t\,dt$$

$$= \frac{t^4}{2} + 2t^3 - 3t^2 + \mathbf{c}\Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{2} + 2(2)^3 - 3(2)^2 + \mathbf{c}\right] - \left[\frac{0^4}{2} + 2(0)^3 - 3(0)^2 + \mathbf{c}\right]$$

$$= 8 + 16 - 12 = 12$$

9

CONTOH 3

Jika $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, hitunglah $\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ dari (0, 0, 0) sampai (1, 1, 1) sepanjang lintasan berikut.

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$

(b) Garis lurus dari (0, 0, 0) sampai (0, 0, 1), kemudian sampai (0, 1, 1) dan setelah itu sampai (1, 1, 1)

Penyelesaian

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_c [(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}].(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_c [(3x^2 - 6yz)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz]$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz)$$

$$= \int_a^b (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

10

CONTOH 3

Jika $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, hitunglah $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ dari (0, 0, 0) sampai (1, 1, 1) sepanjang lintasan berikut.

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$

(b) Garis lurus dari (0, 0, 0)sampai(0, 0, 1), kemudian sampai (0, 1, 1) dan setelah itu sampai (1, 1, 1)

(a) Jika $x = t, y = t^2, z = t^3$, titik (0, 0, 0)dan (1, 1, 1) masing-masing dengan $t = 0$ dan $t = 1$ yang diperoleh dengan menggunakan persamaan parameter. Maka

$$\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_c [(3t^2 - 6(t^2)(t^3))dt + (2t^2 + 3(t)(t^3))d(t^2) + (1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2)d(t^3)]$$

$$= \int_{t=0}^{1} [(3t^2 - 6t^5)dt + (4t^3 + 6t^5)dt + (3t^2 - 12t^{11})dt]$$

$$= 2$$

11

CONTOH 3

Jika $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, hitunglah $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ dari (0, 0, 0) sampai (1, 1, 1) sepanjang lintasan berikut.

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$

(b) Garis lurus dari (0, 0, 0)sampai(0, 0, 1), kemudian sampai (0, 1, 1) dan setelah itu sampai (1, 1, 1)

Sepanjang C, $\mathbf{A} = (3t^2 - 6t^5)\mathbf{i} + (2t^2 + 3t^4)\mathbf{j} + (1\text{-}4t^9)\mathbf{k}$ dan $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt$. Maka

$$\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} [(3t^2 - 6t^5)dt + (4t^3 + 6t^5)dt + (3t^2 - 12t^{11})dt] = 2$$

12

CONTOH 3

(b) Sepanjang garis lurus dari (0, 0, 0) sampai (0, 0, 1), $x = 0, y = 0, dx = 0, dy = 0$, sedang z berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{z=0}^{1} [(3(0)^2 - 6(0)z)0 + (2(0) + 3(0)z)0 + (1 - 4(0)(0)z^2)dz]$$

$$= \int_{z=0}^{1} dz = 1$$

Sepanjang garis lurus dari (0, 0, 1) sampai (0, 1, 1), $x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0$, sedang y berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{y=0}^{1} [(3(0)^2 - 6y(1))0 + (2y + 3(0)(1))dy + (1 - 4(0)(y)(1)^2)0]$$

$$= \int_{y=0}^{1} 2y\, dy = 1$$

Sepanjang garis lurus dari (0, 1, 1) sampai (1, 1, 1), $y = 1, z = 1, dy = 0, dz = 0$, sedang x berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{x=0}^{1} [(3(x)^2 - 6(1)(1))dx + (2(1) + 3x(1))0 + (1 - 4x(1)(1)^2)0]$$

$$= \int_{x=0}^{1} (3x^2 - 6)dx = -5$$

Jadi $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 1 - 5 = -3$

13

SOAL 1

Carilah usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya yang diberikan oleh $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ sepanjang kurva $x = 2t, y = t^2 - 1$ dari t=0 hingga t=2

Penyelesaian

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c (y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}).(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j})$$

$$= \int_0^2 ydx + x^2dy$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 1)2dt + (2t)^2 2tdt$$

$$= \int_0^2 (2t^2 - 2 + 8t^3)dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t + 2t^4 \Big|_0^2 = \frac{100}{3}$$

14

SOAL 2

Jika $\mathbf{A} = (2y + 3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$. Hitunglah $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang lintasan-lintasan C berikut:

(a) $x = 2t^2,\ y = t,\ z = t^3$ dari $t = 0$ hingga $t = 1$

(b) garis-garis lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(0, 0, 1)$, kemudian ke $(0, 1, 1)$ dan kemudian ke $(2, 1, 1)$