MATEMATIKA III

INTEGRASI VEKTOR

ananda.lecture.ub.ac.id

1. Teorema Divergensi Gauss
2. Teorema Stokes
3. Teorema Green

MATEMATIKA III

1. Teorema Divergensi Gauss

1. Teorema Divergensi Gauss

Contoh Aplikasi : Mencari volume air yang mengalir pada pipa PDAM

Dihitung dengan integral permukaan

Atau (lebih mudah)
Menggunakan Teorema GAUSS

1. Teorema Divergensi Gauss

volume total per detik dari fluida yang keluar dari permukaan tertutup S

$$= \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Volume per detik dari fluida yang keluar pada sebuah elemen volume dV.

$$= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV$$

$$\iint_S \mathbf{v} \,.\, \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \,.\, \mathbf{v}\, dV$$

Volume total per detik dari fluida yang keluar dari semua elemen volume dalam permukaan tertutup S

5

1. Teorema GAUSS

DEFINISI

- Misalkan V adalah volume yang dibatasi oleh suatu permukaan tertutup S dan A adalah sebuah fungsi vektor dengan turunan2 yang kontinu, maka

$$\iiint_V \nabla \,.\, \mathbf{v}\, dV = \iint_S \mathbf{A} \,.\, \mathbf{n}\, dS = \oiint_S \mathbf{A} \,.\, d\mathbf{S}$$

Integral divergensi A dalam volume yang diselubungi oleh permukaan tsb.

Integral permukaan dari sebuah vektor A yg mengelilingi sebuah permukaan tertutup S

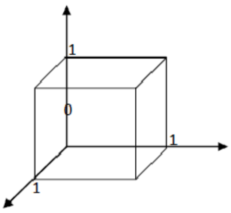
Teorema Divergensi GAUSS

6

CONTOH 1....!!

Hitunglah $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ di mana $\mathbf{A} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$ dan S adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Penyelesaian....

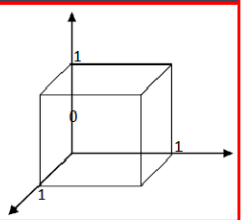


Menurut teorema divergensi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

7

CONTOH 1....!!



$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot[(2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}]dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2 + x^2 - 2xz)\,dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(2x + \frac{x^3}{3} - x^2z\right)\Big|_0^1 dydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{7}{3} - z\right)dydz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{3}y - zy\right)\Big|_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - z\right)dz$$

$$= \left(\frac{7z}{3} - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{6}$$

Jadi $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \frac{11}{6}$

8

CONTOH 2....!!

Hitunglah $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS$ di mana S adalah suatu permukaan tertutup

Penyelesaian....

Menurut teorema divergensi,

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k})dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right) dV$$

$$= 3\iiint_V dV = 3V$$

di mana V adalah volume benda yang dibatasi S.

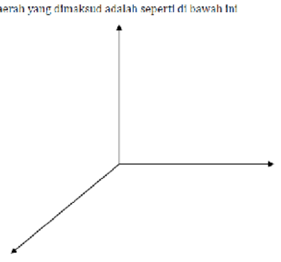
9

LATIHAN....!!

Hitung $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ untuk $\mathbf{A} = (2xy+z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x+3y)\mathbf{k}$ pada daerah yang dibatasi oleh $2x+2y+z=6, x=0, y=0, z=0$

Penyelesaian

Gambar daerah yang dimaksud adalah seperti di bawah ini



Menurut teorema divergensi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

Maka

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot[(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}]\,dV$$

$$= \int_{x=\dots}^{\dots}\int_{y=0}^{3-x}\int_{z=\dots}^{\dots} \dots\, dzdydx$$

$$= \int_{x=\dots}^{\dots}\int_{y=0}^{3-x} \dots \Big|_{\dots}^{\dots} dydx$$

10

2. Teorema STOKES

2. Teorema STOKES

Contoh Aplikasi : USAHA
Pada gambar: Ibu dan bapak sedang mendorong mobil

Jika mobil bergerak → telah melakukan usaha ..!!

1. Metode Perkalian Titik
2. Integral garis (tergantung pada bentuk lintasan)

Teorema STOKES

12

2. Teorema STOKES

DEFINISI

- Misalkan S adalah permukaan berarah dalam ruang dgn batas2nya adalah kurva C tertutup.
- **F** (x,y,z) adalah fungsi vektor kontinu yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam domain yang memuat S, maka

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \, x \, \mathbf{F}).\mathbf{n}\, dS = \iint_S (\nabla \, x \, \mathbf{F}).d\mathbf{S}$$

Integral garis dari sebuah vektor F yang mengelilingi kurva tertutup C

Integral permukaan dari curl F melalui sebarang permukaan S dengan C sbg batas.

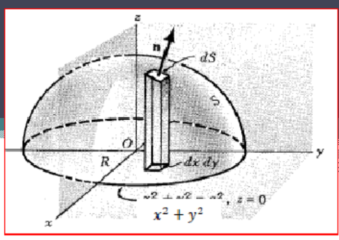
Teorema STOKES

13

CONTOH 1....!!

Hitunglah $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ dengan menggunakan teorema Stokes jika diketahui $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$, dimana S adalah separuh dari permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bagian atas dan C batasnya.

Penyelesaian....



Batas C dari S adalah suatu lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ dan persamaan parameternya adalah $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$, dimana $0 \le t \le 2\pi$. Berdasarkan teorema Stokes $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Maka berdasarkan teorema Stokes $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$

14

CONTOH 1....!!

Hitunglah $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ dengan menggunakan teorema Stokes jika diketahui $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$, dimana S adalah separuh dari permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bagian atas dan C batasnya.

Penyelesaian....

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C [(2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}] \cdot d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \oint_0^{2\pi} (2x - y)dx - yz^2dy - y^2zdz$$

$$= \oint_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)dt$$

$$= \oint_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \sin^2 t)dt$$

$$= \oint_0^{2\pi} \left(-\sin 2t + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Jadi, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi$.

LATIHAN 1....!!

Gunakan teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}dS$ dengan $\mathbf{A} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$, dimana S adalah permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 2$ dan C sebagai batasnya

Penyelesaian

Batas C dari S adalah suatu lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 4, z = 2$ dan persamaan parameternya adalah $x = 2\cos t, y =$ ... ..., $z = 2$, dimana $0 \le t \le 2\pi$. Berdasarkan teorema Stokes $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$.

Maka,

LATIHAN 1....!!

Gunakan teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}dS$ dengan $\mathbf{A} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$, dimana S adalah permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 2$ dan C sebagai batasnya

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (3y\,dx - xz\,dy + yz^2 dz)$$

$$= \oint_{2\pi}^{0} [3(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)dt - (2\cos t)(2)(\dots\dots\dots)dt + 0]$$

$$= \oint_{0}^{2\pi} (\dots\dots\dots + 8\cos^2 t)dt$$

$$= \oint_{0}^{2\pi} \left[12\left(\frac{\dots - \cos 2t}{\dots}\right) + 8\left(\frac{\dots\dots\dots + 1}{\dots}\right)\right] dt$$

$$= \oint_{0}^{2\pi} (\dots - \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + 4)dt$$

$$= \oint_{0}^{2\pi} (\dots - \dots\dots\dots)dt$$

$$= \dots + \dots |_0^{2\pi}$$

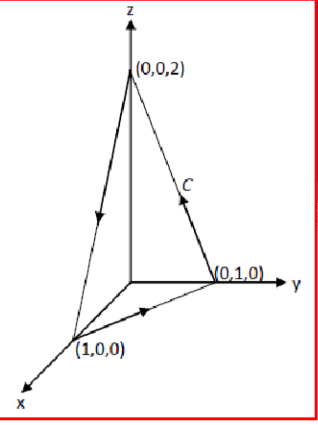
$$= \dots$$

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \dots$$

17

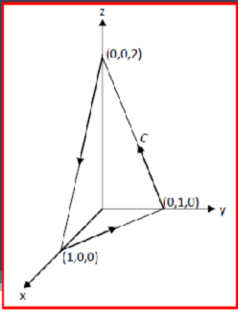
LATIHAN 2....!!

Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + (8x - 3y)\mathbf{j} + (3x + y)\mathbf{k}$ dan C berupa kurva segitiga pada gambar berikut



18

LATIHAN 2....!!



Penyelesaian

Misalkan S berupa kurva dengan C sebagai batas terarahnya, yaitu $2x + \ldots + \ldots = 2$. Vektor satuan normal $\mathbf{n}$ pada permukaan S adalah

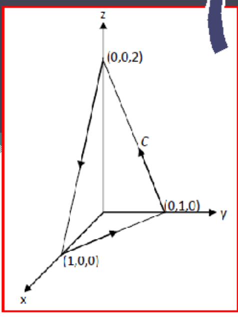
$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{\nabla(2x + \ldots + \ldots - 2)}{\sqrt{2^2 + \ldots + \ldots}} = \frac{2\mathbf{i} + \ldots + \ldots}{\ldots}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial(\ldots)}{\partial y} - \frac{\partial(\ldots)}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial(\ldots)}{\partial x} - \frac{\partial(2z)}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial(\ldots)}{\partial x} - \frac{\partial(2z)}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i} - \ldots + \ldots$$

LATIHAN 2....!!



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\ldots} (\mathbf{i} - \ldots + \ldots) \cdot \left(\frac{2\mathbf{i} + \ldots + \ldots}{\ldots}\right) \frac{dydx}{|\mathbf{n}.\ldots|}$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\ldots} \left(\frac{2 - \ldots + \ldots}{\ldots}\right) \frac{dydx}{|\mathbf{n}.\ldots|}$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\ldots} \frac{\ldots}{\ldots} \frac{dydx}{\left|\frac{\ldots}{\ldots}\right|}$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\ldots} \ldots\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \ldots \Big|_0^{\ldots} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \ldots\ldots\ldots\, dx$$

$$= \ldots \Big|_0^1$$

$$= \ldots$$

Jadi $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \ldots$

3. Teorema GREEN

3. Teorema GREEN

Contoh Aplikasi : USAHA
Pada gambar: Ibu dan bapak sedang mendorong mobil

Jika mobil bergerak → telah melakukan usaha ..!!

1. Metode Perkalian Titik
2. Integral garis (tergantung pada bentuk lintasan)

1. Teorema STOKES
2. Teorema GREEN dalam bidang

22

3. Teorema GREEN

PERBEDAAN

- Teorema Stokes berlaku untuk permukaan2 S dalam ruang yang memiliki kurva C sebagai batasnya. Sedangkan Teorema Green berlaku pada daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh kurva tertutup C.

DEFINISI

- Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C.
- M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari dan yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam R, maka

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Teorema GREEN

23

3. Teorema GREEN

DEFINISI

Jika $\mathbf{A}$ menyatakan medan gaya yang bekerja pada sebuah partikel dimana $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, maka $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ adalah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan partikel tersebut mengelilingi suatu lintasan tertutup C. Yaitu

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \oint_C M dx + N dy$$

Teorema GREEN

$$Usaha = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

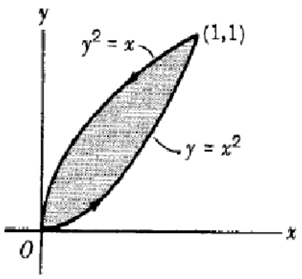
24

CONTOH 1....!!

Periksa teorema Green pada bidang untuk $\int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ dimana C adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$

Penyelesaian

Kurva-kurva bidang tersebut berpotongan di (0, 0) dan (1,1). Arah positif dalam menjalani C ditunjukkan pada gambar



25

CONTOH 1....!!

Periksa teorema Green pada bidang untuk $\int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ dimana C adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$

Sepanjang $y = x^2$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^{1} [(2x)(x^2) - x^2]dx + [(x) + (x^2)^2]d(x^2)$$

$$= \int_{x=0}^{1} (2x^3 + x^2 + 2x^5)dx = 7/6$$

Sepanjang $y^2 = x$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=1}^{0} [(2y^2)(y) - (y^2)^2]d(y^2) + (y^2 + y^2)dy$$

$$= \int_{y=1}^{0} (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)dy = -17/15$$

Maka integral garis yang diinginkan = 7/6 – 17/15 = 1/30

26

CONTOH 1....!!

Periksa teorema Green pada bidang untuk $\int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ dimana C adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$

Dengan menggunakan teorema Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R \left[\frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - x^2)}{\partial y}\right] dxdy$$

$$= \iint_R (1 - 2x)dxdy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)dydx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)dx = 1/30$$

Dengan demikian selesailah pemeriksaan teorema Green.