BLOG DOSEN:
ananda.lecture.ub.ac.id

Matematika III

INTEGRAL VEKTOR – INTEGRAL VOLUME

2

INTEGRAL VOLUME

Integral volume

Pernahkah terpikir berapa banyak air yang dapat ditampung oleh sebuah bak mandi? Anda dapat mencarinya dengan menggunakan integral volume.

DEFINISI INTEGRAL VOLUME

Pandang sebuah permukaan tertutup dalam ruang yang menutup volume V, maka

$$\iiint_V \mathbf{A}\, dV = \iiint_V \mathbf{A}\, dxdydz$$

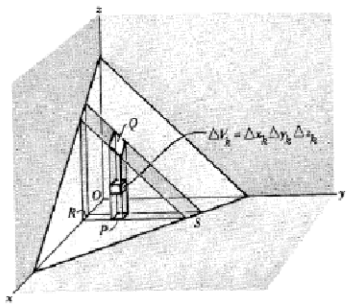
dan

$$\iiint_V \phi\, dV = \iiint_V \phi\, dxdydz$$

$\iiint_V \phi\, dV$ dinyatakan sebagai **limit dari jumlah**.

DEFINISI INTEGRAL VOLUME

Bagi ruang V ke dalam M buah kubus-kubus dengan volume $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$, $k = 1,2,\ldots,M$ seperti diperlihatkan pada gambar berikut.



Misalkan (x_k, y_k, z_k) sebuah titik dalam kubus ini. Definisikan $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$ Pandang jumlah

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k\, \Delta V_k$$

yang diambil untuk semua kubus yang mungkin dalam ruang yang ditinjau.

DEFINISI INTEGRAL VOLUME

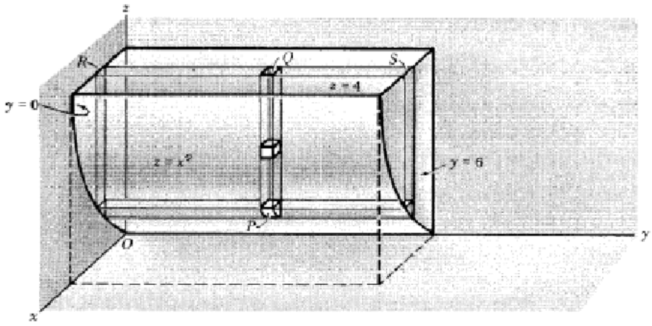
Limit dari jumlah ini, bila $M \to \infty$
sehingga kuantitas-kuantitas terbesar ΔV_k akan mendekati nol, dan jika limit ini ada, dinyatakan oleh

$$\iiint_V \phi \, dV$$

adalah integral volume.

CONTOH#1

Misalkan $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. Hitunglah $\iiint_V \mathbf{F} dV$ dimana V adalah ruang yang dibatasi oleh permukaan-permukaan $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, \ z = 4$.



CONTOH#1

$$\iiint_V \mathbf{F} dV = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}\ dzdydx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\ dzdydx - \mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\ dzdydx$$

$$+ \mathbf{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} y^2\ dzdydx$$

CONTOH#1

Integral untuk komponen **i**

$$\mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\ dzdydx = \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} xz^2|_{x^2}^{4}\, dydx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} 16x - x^5\, dydx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2} 16xy - x^5y|_0^6\, dx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2} 96x - 6x^5\, dx$$

$$= \mathbf{i}(48x^2 - x^5)|_0^2 = 128\mathbf{i}$$

CONTOH#1

Integral untuk komponen **j**

$$-\mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\;dzdydx = -\mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} xz|_{x^2}^{4}\,dydx$$

$$= -\mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} 4x - x^3\,dydx$$

$$= -\mathbf{j}\int_{x=0}^{2} 4xy - x^3y|_0^6\,dx$$

$$= -\mathbf{j}\int_{x=0}^{2} 24x - 6x^3\,dx$$

$$= -\mathbf{j}\,(12x^2 - \frac{6}{4}x^4)\Big|_0^2 = -24\,\mathbf{j}$$

CONTOH#1

Integral untuk komponen **k**

$$\mathbf{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} y^2\,dzdydx = \mathbf{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} y^2z|_{x^2}^{4}\,dydx$$

$$= \mathbf{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} 4y^2 - x^2y^2\,dydx$$

$$= \mathbf{k}\int_{x=0}^{2} \frac{4}{3}y^3 - \frac{x^2y^3}{3}\Big|_0^6\,dx$$

$$= \mathbf{k}\int_{x=0}^{2} 288 - 12x^2\,dx$$

$$= \mathbf{k}(288x - 24x^3)|_0^2 = 384\mathbf{k}$$

CONTOH#1

Maka,

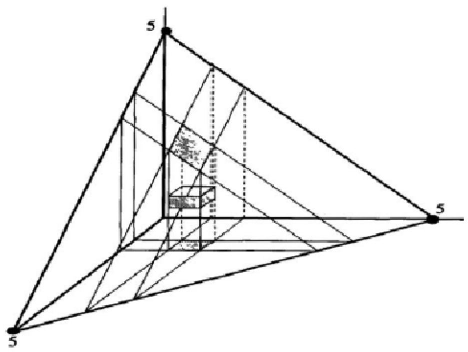
$$\iiint_V \mathbf{F}dV = \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\ dzdydx$$

$$-\mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\ dzdydx\mathbf{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} y^2\,dzdydx$$

$$= 128\mathbf{i} - 24\,\mathbf{j} + 384\mathbf{k}$$

CONTOH#2

Hitung $\iiint_V f(x)\,dV$ di mana $f(x) = x^2 + y^2 + z^2, V$ adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh $x + y + z = 5\ , x = 0, y = 0, z = 0.$



CONTOH#2

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{5-x}\int_{z=0}^{5-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,dzdydx$$

$$= \int_{x=0}^{5}\int_{0}^{5-x}\left(x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_0^{5-x-y} dydx$$

$$= \int_{x=0}^{5}\int_{0}^{5-x}\left[(x^2+y^2)z+\frac{1}{3}z^3\right]\Big|_0^{5-x-y} dydx$$

$$= \int_{0}^{5}\int_{0}^{5-x}\left[(x^2+y^2)(5-x-y)+\frac{(5-x-y)^3}{3}\right]dydx$$

CONTOH#2

$$= \int_0^5\left[x^2(5-x)-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{(5-x)}{3}y^3-\frac{y^4}{4}\right.$$

$$\left.-\frac{(5-x-y)^4}{12}\right]\Big|_0^{5-x} dx$$

$$= \int_0^5\left[\frac{x^2(5-x)^2}{2}+\frac{(5-x)^4}{6}\right]dx$$

$$= \left(\frac{25x^3}{6}-\frac{5x^4}{4}+\frac{x^5}{10}-\frac{(5-x)^5}{30}\right)\Big|_0^5 = \frac{625}{4}$$

Jadi, $\iiint_V f(x)dV = \frac{625}{4}$

SOAL#1

Hitunglah volume benda yang dibatasi oleh permukaan $2x + 2y + z = 4$, $z = 0, y = 0$, dan $x = 0$ yang terletak dikuadran pertama jika diketahui $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$.